自己相似集合に対するレートひずみ関数

川端　勉　　　電気通信大学

1　導入

$$X \sim p(X) : R^k \text{上の滑らかな密度}$$

and if

$$d(X,Y) = \parallel X - Y \parallel^r, r > 0$$

レートひずみ関数:

$$R(D) \overset{def}{=} \inf_{E[d(X,Y)] \leq D} I(X;Y)$$

$D \to 0$としたとき漸近的に

$$R(D) \sim \frac{r}{k} log \frac{1}{D}$$

2　準備

定義 (自己相似変換): 線形変換 $W : R^k \to R^k$ は
$W(x) = \alpha \mathbf{O} x + \beta,$ と表せるとき**自己相似**であるという。ただし、
$\alpha \in (0,1)$, $\mathbf{O}$：直交変換、 $\beta \in R^k$.

定義 (自己相似集合) $W_i S$ が互いに素であるような自己相似変換 $W_i,\ i = 1, \ldots, m$ が存在して

$$S = \bigcup_{i=1}^{m} W_i S \ ,$$

と書けるとき S を**自己相似集合**とよび、m を自己相似の次数とよぶ（一意とは限らない。）

例 (α-カントル集合): $S \subset [0,1]$ は一点を含み、$0 < \forall \alpha < 1/2,$ に対して、

$$S = \alpha S \cup \{\alpha S + (1-\alpha)\} \ ,$$

を満たすとき α-カントル集合という。

α-カントル集合は、自己相似集合であり、自己相似変換 $W_1(x) = \alpha x$ および $W_2(x) = \alpha x + (1-\alpha)$ をもつ（従って次数 m は 2)。$\alpha = \frac{1}{3}$ のとき、通常のカントル集合になる。

Hausdorff-Besicovitch 次元:

自己相似集合 S の Hausdorff-Besicovitch 次元は

$$f(d) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^d = 1 \tag{1}$$

を満たす唯一の正根 d^* である。

例えば、α-カントル集合については、$d^* = \log_{\frac{1}{\alpha}}(2)$.

　S の Hausdorff-Besicovitch 次元は

$$= inf\{s : sup_{\delta>0} inf_{\{U_i\}}\{\sum_i \| U_i \|^s : S \subset \bigcup_i U_i, \forall i, \| U_i \| < \delta\} < \infty\},$$

で定義される。ただし $\| \quad \|$ は集合の直径.

$\| S \| < \infty$, ならば、
半径 δ の球 約 $\delta^{-dim(S)}$ 個で S を覆うことができる。

写像 $\underline{b} : S \to M^\infty$ を

$$\underline{b}(x) \stackrel{def}{=} \{b_1^\infty \in M^\infty : \forall n \geq 0, x \in W_{b_1} W_{b_2} \ldots W_{b_n} S\}$$

で定める。S 上の確率測度 μ に対し M^∞ 上の 確率測度 μ^* を

$$\mu^*(\mathcal{D}) = \mu(b^{-1}(\mathcal{D})$$

で定義する。

μ^* が定常なとき、μ は **定常*** という。同様に、μ^* がエルゴート的なとき、μ は **エルゴート的*** であるという。

特に、M 上の確率分布 p_i によって $\mu^*(b_1, b_2, \ldots) = p_{b_1} p_{b_2} p_{b_3} \ldots$ と書けるとき、測度 μ は**自己相似**であるという。いいかえると、$A \in R^k$ にたいし、

$$\mu(A \cap S) = \sum_{i=1}^{m} p_i \mu((W_i^{-1} A) \cap S),$$

のとき自己相似という。

例 S を α-カントル集合とする。上の式で $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ であるとき　μ を S 上の α-**カントル測度**という。特に $\alpha = \frac{1}{3}$ カントル測度を単に**カントル測度**という。

ひずみ測度に対する要請

- 同次性
  $d(W_i x, W_i y) = \alpha_i^r d(x, y)$ for $i = 1, \ \ldots, \ m.$
- 三角不等式
  for all $x, \ y, \ z$

$$|d(x,z)^{1/r} - d(x,y)^{1/r}| \leq d(y,z)^{1/r} \ . \tag{2}$$

- 有限性
  $D_r(1) \stackrel{def}{=} \min_y E[d(X,y)] \leq \infty,$

特に、$d(x,y) \stackrel{def}{=} \parallel x - y \parallel^r$ は上の三条件を満足する。ただし、$\parallel \ \parallel$ はユークリッド距離を表す。

相互情報量の定義

アルファベット A　上の　$i.i.d.$ 情報源　を考え、その確率測度を　μ とする。　また　A に対するボレル集合を $\mathcal{A}$　とかく。再生アルファベットを B そのボレル集合を $\mathcal{B}$ をかく。

- $\nu(\cdot,\cdot) : A \times \mathcal{B} \to R^+$ A から B への通信路確率測度
- $\mu\nu : \mathcal{A}\mathcal{B} \to R^+$ $A \times B$ 上の同時確率測度。
- $\overline{\nu} : \mathcal{B} \to R^+$　$\mu\nu$ の B の上での周辺分布。
- $\mu \otimes \overline{\nu} : \mathcal{A}\mathcal{B} \to R^+$ μ および $\overline{\nu}$ の積測度

$$I(\mu,\nu) \stackrel{def}{=} \sup \sum_{i,j} \mu\nu(G_i \times H_j) \log \frac{\mu\nu(G_i \times H_j)}{(\mu \otimes \overline{\nu})(G_i \times H_j)} \quad ,$$

但し、sup は　$A\times B$ のあらゆるメッシュ $A\times B = \uplus_{i,j}(G_i\times H_j)$ についてとる。

レートひずみ関数: ひずみ測度 $d(\cdot,\cdot) : A \times B \to R^+$ に関する $R(D)$:

$$R(D) = \inf_{\nu : E[d(X,Y)] \le D} I(\mu,\nu)\ ,$$

ただし、X, Y は 同時分布 $\mu\nu$ に従う確率変数。
$R(D)$ は確率分布 μ に従う離散時間無記憶情報源を平均ひずみ D 以下で復元する際に必要となる、一シンボル当たりの最小ビット数である。(T.Berger “Rate Distortion Theory”).

ひずみが小さいときの $R(D)$ の漸近的性質を調べる。
定義 ($\rho(\mu)$): μ は $\mu*$ が定常かつエルゴート的な確率分布であるとする。

$$\rho(\mu) \stackrel{def}{=} \frac{H_\infty(\mu^*)}{E_{\mu^*}[-\log \alpha_{b_1}]} \tag{3}$$

ただし、$E_{\mu^*}[-\log \alpha_{b_1}] = -\sum_{i=1}^m \mu(S_i)\log \alpha_i$ and

$$H_\infty(\mu^*) \stackrel{def}{=} \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\sum_{b_1=1}^m \cdots \sum_{b_n=1}^m \mu^*(b_1,\ldots,b_n)\log \mu^*(b_1,\ldots,b_n)\ ,$$

は定常エルゴート的確率過程 μ^* のエントロピーレートである。

主定理:
S が "カントル的" ならば S 上の定常 * かつエルゴート的 * な確率測度 μ に対して、

$$\lim_{D\to 0}\left[-\frac{rR(D)}{\log D}\right] = \rho(\mu)\ .$$

が成り立つ。

3 離散測度による近似

自己相似集合 S 上の確率変数 $X \sim \mu$ に対して、$x \in S$ に対応する無限列 $b(x) = \{b_1, \ldots, b_j, \ldots\} \in M^\infty$ に対して

$$n_\delta(x) \stackrel{def}{=} \inf\{n : \prod_{j=1}^{n} \alpha_{b_j} \leq \delta\} \, . \tag{4}$$

により定義される $n_\delta(x)$ は確率過程 μ^* に関する Stoping time である。いい換えると、$\{b : \exists x, b = (b_1, \ldots, b_{n_\delta(x)})\}$ は m 進完全語頭集合をなす。つまり、m 進完全木とみなせる。これを T_δ とかく。
S の次の意味での中心
$\hat{x} \stackrel{def}{=} argmin_{\hat{x} \in R^k} \max_{x \in S} d(x, \hat{x})$
を考える。
これを用いて、S の量子化スキーム Q_δ を任意の $x \in S$ に対して、
$Q_\delta(x) = x_\delta \stackrel{def}{=} W_{b_1} W_{b_2} \ldots W_{b_{n_\delta(x)}}(\hat{x})$
と定義する。このとき、

$$d(x, x_\delta) \leq (\prod_{j=1}^{n_\delta(x)} \alpha_{b_j}^r) \sup_{z \in S} d(z, \hat{x}) \leq \delta^r D_r^*(1) \, . \tag{5}$$

ただし、$D_r^*(1) = \max_{x \in S} d(x, \hat{x})$ であったことに注意。$X_\delta = Q_\delta(X)$ の確率分布を μ_δ と書き、同じひずみ測度に対して、$R_\delta(D)$ をそのレートひずみ関数と定義する。

Λ_δ を 量子化関数 $Q_\delta : S \to R^k$ の値域とする。

定理 1

$R_\delta((D^{1/r} + \delta D_r^*(1)^{1/r})^r) \leq R(D) \leq R_\delta((D^{1/r} - \delta D_r^*(1)^{1/r})^r)$,

ただし、$D < 0$ に対しては $R_\delta(D) \stackrel{def}{=} \infty$。

証明:

$$
\begin{aligned}
R(D) &\overset{(A)}{=} \inf_{\substack{X \to Y \\ E[d(X,Y)] \le D}} I(X;Y) \\
&\overset{(B)}{\le} \inf_{\substack{X \to X_\delta \to Y \\ E[d(X,Y)] \le D}} I(X;Y), \\
&\overset{(C)}{\le} \inf_{\substack{X \to X_\delta \to Y \\ E[d(X_\delta,Y)] \le (D^{1/r} - \delta D_r^*(1)^{1/r})^r}} I(X_\delta;Y) \\
&\overset{(D)}{=} R_\delta((D^{1/r} - \delta D_r^*(1)^{1/r})^r)
\end{aligned}
$$

□

μ が離散確率分布なら、$R(D)$ に対する双対表現が既知 (e.g. T.Berger, “Rate Distortion Theory”)。離散確率分布を p_i、出力アルファベットとのひずみを d_{ij} とかく、このとき、

$$R(D) = \sup_{\substack{s \leq 0, \lambda_{s,i} \geq 0, \\ \max_j \sum_i \lambda_{s,i} p_i e^{s d_{ij}} \leq 1}} \{sD + \sum_i p_i \log \lambda_{s,i}\}. \tag{6}$$

が成り立つ。

定義: 自己相似集合 S が “カントル的” であるとは、十分大きな K にたいして、

$$C(K) \stackrel{def}{=} \sup_{\delta>0} \sup_{y \in R^k} \sum_{x_\delta \in \Lambda_\delta} e^{-K\delta^{-r} d(x_\delta, y)} < \infty\ . \tag{7}$$

が成り立つときをいう。

補題 1 もし、

$$\inf_{\delta>0}\min_{i\neq j}\left\{\min_{x,x':W_i(x)\in\Lambda_\delta,\,W_j(x')\in\Lambda_\delta} d(W_i(x),W_j(x'))^{1/r}\right\}=\epsilon>0\ , \tag{8}$$

なら、S は“カントル的”である。

特に、$a^*<\frac{\epsilon}{2}$ および、任意の $K>\frac{d^*}{r(a^*)^r}$ にたいして、

$$C(K)\leq 1+\frac{(\min_i\alpha_i)^{-d^*}e^{-K(a^*)^r}}{1-\phi^{(rK(a^*)^r-d^*)}}\ \ , \tag{9}$$

が成り立つ。ただし、d^* は S の *Hausdorff-Besicovitch* 次元であり、ϕ は $\phi^{\frac{2a^*}{\epsilon}}<1$ であるような数である。

定理 2 自己相似集合 S に関し、$X_\delta = Q_\delta(X)$ と定義すると、以下が成り立つ。

(a). S 上の任意の確率測度 μ に対して、

$$R(D_r^*(1)\delta^r) \le H(X_\delta)\ .$$

が成り立つ。

(b). S が "カントル的" なら、十分に大きな K に対し、

$$R(D_r^*(1)\delta^r) \ge H(X_\delta) - \log C(K) - K2^r D_r^*(1)\ .$$

がなりたつ。

証明:

(a). 定理 1 の不等式:$R(D) \le R_\delta((D^{1/r} - \delta D_r^*(1)^{1/r})^r)$ に $D = \delta^r D_r^*(1)$ と代入すると、

$$R(D) \le R_\delta(0) \le H(X_\delta)\ ,$$

が得られる。

(b). 定理1の不等式:$R_\delta((D^{1/r}+\delta D_r^*(1)^{1/r})^r) \le R(D)$ に $D = \delta^r D_r^*(1)$ と代入すると、

$$R_\delta(2^r\delta^r D_r^*(1)) \le R(D)\ .$$

をうる。$R_\delta(2^r\delta^r D_r^*(1))$ に対する双対表現をもちいる。S が "カントル的" なら、十分大きな K に対し、s の値として $-K\delta^{-r}$ を用い、さらに、λ_{s,x_δ} として、

$$\lambda_{s,x_\delta} = \frac{1}{C(K)\mu_\delta(x_\delta)}\ .$$

を用いると、" カントル的" であるということの定義より任意の $\delta > 0$ および任意の $y \in R^k$ に対して、

$$\sum_{x_\delta \in \Lambda_\delta} \lambda_{s,x_\delta}\mu_\delta(x_\delta)e^{sd(x_\delta,y)} \le 1\ ,$$

が成り立つ。従って、双対表現より、

$$R(D) \ge -K2^r D_r^*(1) + H(X_\delta) - \log C(K) \qquad (10)$$

をうる。□

4　レートひずみ次元

$$\rho(\mu) \stackrel{def}{=} \frac{H_\infty(\mu^*)}{E_{\mu^*}[-\log \alpha_{b_1}]} \tag{11}$$

ただし、 $E_{\mu^*}[-\log \alpha_{b_1}] = -\sum_{i=1}^m \mu(S_i) \log \alpha_i$。（対数期待圧縮率）

特に, 自己相似測度に対しては、

$$\rho(\mu) = \frac{\sum_{i=1}^m p_i \log p_i}{\sum_{i=1}^m p_i \log \alpha_i} \ .$$

定理 3 S 上定常 * かつエルゴート * 的確率測度 μ に対して、S が”カントル的”なら、

$$\lim_{D \to 0} \left[-\frac{rR(D)}{\log D} \right] = \rho(\mu) \ .$$

が成り立つ。

証明: $-\log\delta = -\frac{1}{r}\log D + \frac{1}{r}\log D_r^*(1)$ が成り立つので

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{H(X_\delta)}{-\log\delta} = \rho(\mu)\ . \tag{12}$$

を示すだけでよい。

補題 2 $Z_1,\dots,Z_n,\dots$ を有限アルファベットに値をとるエルゴート的、定常過程とする。$N_a = \inf\{n : \sum_{j=1}^n Z_j \geq a\}$ とすると、

$$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}H(Z_1,\dots,Z_{N_a}) = H_\infty(Z)/E(Z_1)\ , \tag{13}$$

が成り立つ。ただし、

$$H_\infty(Z) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(Z_1,\dots,Z_n) = H(Z_1|Z_{-\infty}^0)\ ,$$

はこの過程のエントロピーレートである。

この定理を適用するには Z_i として $-\log\alpha_{b_i}$ をとり、$a = -\log\delta$ $H(X_\delta) = H(Z_1,\dots,Z_{N_a})$ に注意する。

レートひずみ次元:

定理 4

$$\sup_{\mu^* stationary} \left\{ \frac{H_\infty(\mu^*)}{E_{\mu^*}(-\log \alpha_{b_1})} \right\} = d^*$$

ただし、d^* は S の *Hausdorff-Besicovitch* 次元である。$\rho(\mu) = d^*$ が成り立つような唯一の確率測度 μ はパラメータが $p_i = \alpha_i^{d^*}$ の自己相似測度である。

この事実より、S の自己相似次元（*rate distortion dimension*）を

$$\sup_{\mu(S)=1} \limsup_{D\to 0} \left[-\frac{rR(D)}{\log D} \right],$$

と定義するのが適当である。

論文では Kolmogorov のメトリック次元 Zador の量子化次元との関係について論じ、この定義がある意味でもっとも本質的な集合の次元の定義であることを明らかにしている。

比較的低レートにおける下界

議論を二乗ひずみ $d(x,y)=|x-y|^2$ に限定する。

定理 5 $d(x,y) = |x-y|^2$ とし、$y^* \overset{def}{=} E_\mu[X]$ を $D_2(1) = E_\mu[d(X,y^*)]$ を達成する点とする。μ が y^* (i.e. $d\mu(X-y^*) = d\mu(y^*-X)$) のまわりで対称ならば、

$$R(D) \geq \frac{D_2(1)-D}{2D_2^*(1)} \ . \tag{14}$$

が成立する。

この補題を証明するには双対表現を次の補題の形に一般化する。

補題 3

$$R(D) \geq \sup_{\substack{s\leq 0 \quad \lambda_s(x)\geq 0, \\ \forall y, \int \lambda_s(x)e^{sd(x,y)}d\mu(x)\leq 1}} \{sD + \int \log\lambda_s(x)d\mu(x)\} \ ,$$

ただし、sup は あらゆる非負の可測関数 λ_s に関してとる。

- $\lambda_s(x) = e^{-sd(x,y^*)}$ と選択する。
- $f(y) \overset{def}{=} \{\int e^{s[d(x,y)-d(x,y^*)]}d\mu(x)\}$ が不等式 $\sup_y f(y) \leq 1$ を満足する範囲の $s \leq 0$ について、下界 $R(D) \geq s\{D - D_2(1)\}$ が成り立つ。
- 上の定理の下界は、特に $s = \frac{-1}{2D_2^*(1)}$ のとき $\sup_y f(y) \leq 1$ が成り立つことを用いる。
- α-カントル測度について計算してみると、$R(D) \geq 2(D_2(1) - D)$ となる。

α-カントル測度に特有の性質

補題 4 α-カントル測度について、

$$\int_0^1 e^{\omega(x-y^*)} d\mu(x) = \prod_{n=0}^{\infty} \cosh(\frac{1}{2}(1-\alpha)\omega\alpha^n) \leq e^{\frac{\omega^2(1-\alpha)}{8(1+\alpha)}} \ , \quad (15)$$

かつ

$$D_2(1) = \int_0^1 |x-y^*|^2 \mu(dx) = D_2^*(1) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \ . \quad (16)$$

が成り立つ。

この補題を用いると、よりシャープな下界 $R(D) \geq 4(D_2(1) - D) = \frac{1}{2} - 4D$ をうる。

スカラー積符号により達成可能なレート:

スカラー積符号＝一般にレートが異なるスカラー量子化器の直積

$d(x,y) = \mid x - y \mid^r$, N-レベルのスカラー量子化器の最小期待ひずみは

$$D_r(N) = \min_{\text{over } Q(\cdot)\text{with } N\text{levels}} \int \mid x - Q(x) \mid^r d\mu \ ,$$

と表され、レートは $R_r(N) = \log N$。各時刻 i における量子化点数を N_i とし、$\mathbf{N} = (N_1, N_2, \ldots, N_n)$ とおく。平均レート並びに平均ひずみは

$$R_{\mathbf{N},r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log N_i \quad ,$$

かつ

$$D_{\mathbf{N},r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} D_r(N_i) \quad .$$

以下を仮定する

条件 1 $N \geq 2$ に対して、 $D_r(N)$ は区間 $(\alpha, 1-\alpha)$ に量子化点を配置しないときに達成される。

定理 6 $\alpha \leq \frac{1}{3}$ と仮定する。また、条件 *1* が成立するものとする。このとき

$$(R_{\mathbf{N},r}, D_{\mathbf{N},r}) \in \{(l \log 2, D_r(1)\alpha^{lr}), l = 0, 1, \ldots\} \text{ の凸包}.$$

が成り立つ。

条件 1 は $\alpha = \frac{1}{3}$ は (カントル測度) および $N = 2^l$ のときに P.L.Zador,"Asymptotic Quantization Error of Continuous Signals and the Quantization Dimension," *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. IT-28, No.2,Part I,pp.139-149, March 1982, で証明なしに述べられたものである。この条件は任意の α, 任意の N に対しては成立しない。論文では以下の補題を示してある。

補題 5 条件 *1* は $\alpha \leq 2 - \sqrt{3}$ かつ $r \geq 2$ の範囲で成立する。