日本応用数理学会年会予稿集、電気通信大学、1992 年 10 月

自己相似集合上の確率測度のレートひずみ関数

川端 勉（電気通信大学電子情報学科）

集合 $\mathcal{X}$ に値をとる確率過程 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える。集合 $\mathcal{Y}$ と歪み尺度 $d:\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\to[0,\infty)$ が与えられているものとする。平均歪み尺度 $d_n:\mathcal{X}^n\times\mathcal{Y}^n\to[0,\infty)$ を $d_n(x^n,y^n)=(1/n)\sum_{i=1}^n d(x_i,y_i)$ と定義する。像のサイズが有限な関数 $g_n:\mathcal{X}^n\to\mathcal{Y}^n$ を $n-$ ブロック（情報源）符号器と呼び、そのレートを $r_n \stackrel{def}{=} (1/n)\log_2|g_n(\mathcal{X}^n)|$ と定義する。与えられた歪みレベル D に対し、期待平均歪み：$E[d_n(X^n,g_n(X^n))]$ の列が高々 D を上界とするような符号器列 $\{g_n\}$ に対応するレート列 $\{r_n\}$ の下限を $D-$ 達成レートと呼ぶ。

さて、確率過程として $\mathcal{X}$ 上の確率測度 μ から定義される $i.i.d.$ 過程をとる。ν を $x\in\mathcal{X}$ が与えられたときの $\mathcal{Y}$ 上の条件付確率測度とする。また、(X,Y) を同時分布 $\mu\nu$ に従う確率変数とし、その相互情報量を $I(\mu,\nu)$ と表す。レート歪み関数 $R(D)$ を、$E_{\mu\nu}[d(X,Y)]\le D$ を満足する ν に関する $I(\mu,\nu)$ の下限と定義する。このとき、情報理論の基本結果の一つ、歪み許容情報源符号化定理は "$D-$ 達成レートは $R(D)$ 以上でありかつ $R(D)$ 自身も $D-$ 達成レートになる" と主張する。この事実により、本質的に" 多次元" の中でしか実現できない符号器の最適性能が" 一次元" 的に評価可能となり、かなり見通しがよくなる。しかしながら、一般に $R(D)$ の評価は簡単ではない。

少しだけ特殊化して、$\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ をどちらもユークリッド空間 R^k にとり、歪み測度としてユークリッド距離 $d(x,y)=\parallel x-y\parallel$ をとる。μ の台が有限集合ならば、$R(D)$ を求めるのは興味深い数理計画法の例題である。この場合には、情報理論家の有本並びに Blahut により考案されたアルゴリズム等により数値計算が可能である。一方 μ が密度をもつ場合には、変分問題として定式化できるが、一般解として解ける場合は非常に限られている。数値計算は可能であるが特に D が小さいときには計算が膨大になるだけで見通しが悪い。しかしながら、この領域では "$\lim_{D\to 0} -R(D)/\log D$ はユークリッド空間の次元 k に等しい" という事実が Shannon によって、証明されている。（離散な台の場合にはこの漸近値は 0 になる。）

さて μ の台 S として近年多くの人々の興味を引いているフラクタル集合をとった場合どうであろうか？フラクタル集合では、ハウスドルフ次元が一般に非整数になる。上に述べた漸近値は例えばフラクタル次元になるのであろうか？答えは否であり、一般に測度依存性を持つ。しかし、両者の間には密接な関係がある。

特に基本的な自己相似集合を例にとって考えてみよう。歪み測度としてはもう少し一般に $d(x,y)=\parallel x-y\parallel^r$ をとる。（これは応用上重要だが議論にとって最本質ではない。）ユークリッド空間 R^k の有界部分集合 S は、自分自身のいくつかの相似像の互いに素な和の形に書けるとき自己相似であるといおう。記号では、相似変換 $W_i, i=1,\ldots,m$ を用いて $S=\bigcup_{i=1}^m W_iS$ と書ける。ただし、相似変換とは R^k における直交変換、スケール変換並びに平行移動、を組み合わせてできる線形変換のことである。W_i のスケールを α_i と表す。

さて、任意の $x\in S$ が与えられたとしよう。x は唯一の W_iS に含まれる。この W_iS を W_i^{-1} で拡大すると再び S をうるが、それにともない、$x\in S$ は $W_i^{-1}x$ に変換される。上の操作を繰り返すことにより、次々 $x\in W_{b_1}W_{b_2}\ldots W_{b_t}S$ となるよう、$M\stackrel{def}{=}\{1,\ldots,m\}$ からの数列 $\{b_t\}_{t=1}^{\infty}$ を決めて行くことができる。この写像 $b(x)=\{b_t\}_{t=1}^{\infty}$ により S 上の確率測度 μ は M^{∞} 上の確率測度 μ^* を持つ確率過程に変換される。μ^* が定常かつエルゴート的であるとき、μ^* はエントロピーレート $H_{\infty}(\mu^*)$ をもつ。これより次の量

$$\rho(\mu)\stackrel{def}{=}\frac{H_{\infty}(\mu^*)}{E_{\mu^*}[-\log\alpha_{b_1}]} \tag{1}$$

を定義する。ここで、分母は平均期待対数縮小率と呼ぶとよい。以下結果の一部を述べる。

y_{min} を $D_r^*(1) \stackrel{def}{=} \min_{y \in R^k} \max_{x \in S} \|x-y\|^r$ の最小値を与える点としよう。μ に従う確率変数 X に上のアルゴリズムを適用する。$W_{b_1} W_{b_2} \ldots W_{b_n}$ のスケールが始めて δ 以下に到達する n を N とし、X を $X_\delta \stackrel{def}{=} W_{b_1} W_{b_2} \ldots W_{b_N} y_{min}$ で近似することにする。これはある意味で一様量子化を与えている。同じ歪み測度に対する確率変数 X_δ のレート歪み関数を $R_\delta(D)$ と置く。このとき、次の定理が成り立つ。

Theorem 1

$$R_\delta((D^{1/r} + \delta D_r^*(1)^{1/r})^r) \leq R(D) \leq R_\delta((D^{1/r} - \delta D_r^*(1)^{1/r})^r) , \tag{2}$$

ただし $D < 0$ では $R_\delta(D) \stackrel{def}{=} \infty$ とする。

さて、X_δ の台を Λ_δ と表す。条件

$$\inf_{\delta > 0} \min_{i \neq j} \left\{ \min_{x \in \Lambda_{\delta/\alpha_i},\, x' \in \Lambda_{\delta/\alpha_j}} d(W_i(x), W_j(x'))^{1/r} \right\} = \epsilon > 0 . \tag{3}$$

を満たす S は"カントル的"であるという。これはほぼ、S の各成分がお互い正の距離だけ離れている、といいかえてもよい。よく知られたカントル集合はこれを満たす。次が主定理である。

Theorem 2 "カントル的"な自己相似集合 S について、

$$\lim_{D \to 0} \left[-\frac{rR(D)}{\log D} \right] = \rho(\mu) . \tag{4}$$

が成り立つ。

ハウスドルフ次元との関係は次のとおりである。

Theorem 3

$$\sup_{over\ \mu} \rho(\mu) = d^*. \tag{5}$$

ただし、sup は μ^* が定常かつエルゴート的であるような μ に関してとる。また、d^* は S のハウスドルフ次元、具体的には方程式 $\sum_{i=1}^m \alpha_i^d = 1$ の一意根である。$\rho(\mu) = d^*$ を満たすのは μ が自己相似測度（すなわち $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ が確率 $p_i = \alpha_i^{d^*}$ の i.i.d. 過程）のときである。

この事実に基づき集合の次元の新しい定義を与える。

Definition 1 S をユークリッド空間の任意のコンパクト集合とするとき、

$$\limsup_{D \to 0} \sup_{\mu(S)=1} \left[-\frac{rR(D)}{\log D} \right] . \tag{6}$$

を S のレート歪み次元と呼ぶ。

類似した定義としては、Kolmogorov メトリック次元 (ほとんどいたるところ $\| X - Q(X) \| \leq D^{1/r}$ が成立する様なスカラー量子化器の最小量子化点数の対数を $-\log D^{1/r}$ で割ったものの $D \to 0$ の極限。）あるいは、Zador による量子化次元（メトリック次元の上定義で、ほとんどいたるところ成立する不等式を期待値に関する不等式 $E\| X - Q(X) \|^r \leq D$ で置き換えたもの。）があるが、レート歪み次元はこれらと自己相似集合では一致し、一般には両者いずれよりも大きくはなく、従ってより本質的な次元の定義を与えていると考えることができる。

参考文献

[1] T.Kawabata and A.Dembo, "Rate Distortion Functions for Self-Similar Sets," Submitted to *IEEE Trans. on Information Theory.*

Published in "Rate-Distortion Dimension of Sets and Measures,"
IEEE Trans. on Information Theory, vol.40,no.5,pp.1564-1572,September,1994.