２０１９年6月１７日（川端）

データ圧縮基礎資料

11 差歪測度と Shannon 下界

$\rho(x,y)$ が情報源記号 x と再生記号 y の差 $y-x$ の関数なっているとき差歪測度という．二乗歪や，絶対値歪などのように，差のノルムの関数である場合を含む．以下の議論は，離散の場合でも連続の場合でも成立する．離散の場合には差は $\oplus$ を考える．

本節を通じて

$$g_s(x) := \frac{2^{s\rho(x)}}{\sum_{x'} 2^{s\rho(x')}}, D_s := E_{g_s}\rho(X) = \frac{\sum_x \rho(x) 2^{s\rho(x)}}{\sum_x 2^{s\rho(x)}}$$

と定義する．もちろん $s<0$ は Lagrange 乗数（D_s における $R(D_s)$ の傾き）である．

補題 1 $\sum_x r(x)\rho(x) = D_s$ を満たす任意の確率分布 $r(x)$ に対して $H(r) \leq H(g_s)$ が成り立つ．すなわち，この条件下で g_s はエントロピー最大の分布である．

証明:$\log(1/g_s(x)) = -s\rho(x) + \log\sum_{x'} 2^{s\rho(x')}$ より，

$$E_r \log\frac{1}{g_s} = E_{g_s}\log\frac{1}{g_s}$$

が成り立つが，これより

$$\begin{aligned} 0 \leq D(r \,||\, g_s) &= -H(r) + E_r \log\frac{1}{g_s(X)} \\ &= -H(r) + H(g_s) \end{aligned}$$

が成り立つ．**証明終**

定理 1 $X \sim p_X$ とし，ρ を差歪測度とするとき，$R(D_s) \geq H(p_X) - H(g_s)$ が成り立つ．また，等号条件は，$Z := (X-Y)$ のときに，$Z \perp Y$ および $Z \sim g_s(z)$ が成立することである．

証明:

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(X) - H(X \mid Y) \\ &= H(X) - H(X-Y \mid Y) \\ &\geq H(X) - H(X-Y) \\ &\geq H(p_X) - H(g_s) \end{aligned}$$

最後の不等号に，上の補題を用いている．左辺を $E\rho(X-Y) \leq D_s$ のもとで，最小化すると定理がえられる．等号条件についても上の 2 つの不等号に対する等号条件から明らかである．**証明終**

注意 1 双対表現

$$R(D_s) = \max_{\lambda(\cdot)\in\Lambda_s}\left(sD + \sum_x p_X(x)\log\lambda(x)\right)$$

の制約条件は

$$\Lambda_s := \{\lambda(\cdot) : (\forall x)(\lambda(x) \geq 0), \quad (\forall y)(\sum_x p_X(x)\lambda(x)\exp_2 s\rho(y-x) \leq 1)\}$$

となっている．定数Kを用いて$\lambda(x)p_X(x) = K$となるような$\lambda(x)$に対して，$K = 1/\sum_x \exp_2(s\rho(x))$とおくと，$\lambda \in \Lambda_s$となる．双対表現に，この$\lambda(x)$を代入すると，下界式

$$R(D_s) \geq sD_s - \log(\sum_x \exp_2(s\rho(x))) + H(p_X)$$

が得られるが，右辺は$H(p_X) - H(g_s)$と整理できる．この下界式 *(*シャノンの下界式*)* の名前は提唱者シャノンに由来する．

注意 2 Xが確率密度関数を有する連続分布に従うものとする．D_sが十分小さいならば，g_sはデルタ関数のように振る舞うことが期待できる．あるYおよびその分布P_Y *(*離散でもなんでもよい）が存在してXの密度p_Xが$P'_Y * g_s = p_X$（ただし$*$は畳み込み演算）と書けるほどに滑らかならば，このD_sに関しては，定理の条件が満足されていることになる．つまり，$R(D_s)$はシャノン下界に一致する．この性質を$R(D)$の漸近的一致性 *(Asymptotic Tightness)* とよぶ．漸近的一致性の成り立つ条件について最近でも研究が出ている．